Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft (ZgS) 138 (1982), 722–727
Journal of Institutional and Theoretical Economics

Korrespondenzprinzip bei gemischten Differentialgleichungssystemen

von

MICHAEL BRAULKE und NIKOLAUS K. A. LÄUFER

I.

Im Rahmen der komparativ-statischen Analyse makroökonomischer Gleichgewichtssysteme benötigt man zur Bestimmung der rein qualitativen Auswirkungen von Veränderungen exogener Variablen auf das Gleichgewicht des Systems bekanntlich u.a. auch das Vorzeichen der zugehörigen Systemdeterminante. Ist diese Information nicht schon von vornherein vorhanden, so greift man üblicherweise auf Samuelsons Korrespondenzprinzip[1] zurück, d.h. man konstruiert ein mit dem eigentlichen Gleichgewichtssystem korrespondierendes dynamisches Ungleichgewichtssystem, postuliert für dieses asymptotische Stabilität und gewinnt dann das gesuchte Vorzeichen der Systemdeterminante aus den (notwendigen) Eigenschaften, die bei Stabilität des korrespondierenden dynamischen Systems das zugehörige lineare Approximationssystem besitzen muß.

Häufig stößt man bei der Formulierung des linearen Approximationssystems auf ein *gemischtes* Differentialgleichungssystem (DGS), also auf ein System, in dem neben Differentialgleichungen auch gewöhnliche Gleichungen ohne Differentialquotienten auftauchen. Die Frage ist dann, was das Korrespondenzprinzip in diesem Fall impliziert. Üblicherweise besteht das Vorgehen darin, das gemischte DGS durch Variablenelimination auf ein reines DGS zu reduzieren, die Implikationen der Stabilitätsanalyse zu ermitteln und die Reduktion anschließend wieder rückgängig zu machen. Wir wollen aber zeigen, daß diese in der Regel mühsame Reduktion und deren Umkehrung gar nicht nötig sind, weil sich die Implikationen der Stabilitätsannahme auch für das gemischte DGS und insbesondere das Vorzeichen von dessen Systemdeterminante unmittelbar auswerten lassen.

[1] Siehe SAMUELSON [1941, 1942] und [1947], S. 3 und S. 263.

II.

Ausgangspunkt der gängigen Lehrbuchdarstellung des Korrespondenzprinzips[2] bilden üblicherweise ein Gleichgewichtssystem der Form

(1) $$0 = F(x^*, \alpha) \ ,$$

dessen korrespondierendes dynamisches System

(2) $$\dot{x} = KF(x\,\alpha)$$

und das durch Linearisierung gewonnene lineare Approximationssystem

(3) $$\dot{x} = A(x - x^*) \quad \text{mit} \quad A = KF_x(\mathrm{x}^*, \alpha) \ .$$

Hierbei sind $x = (x_1, \ldots, x_n)$ der Vektor der endogenen Variablen, α irgendein Vektor von Parametern, $F = (F^1, \ldots, F^n)$ eine vektorwertige Funktion, K eine n-dimensionale Diagonalmatrix mit den (oft auf 1 normierten) Diagonalelementen $k_i \neq 0$ und $F_x(x^*, \alpha)$ schließlich die Matrix der partiellen Ableitungen mit dem typischen Element $\partial F^i(x^*, \alpha)/\partial x_j$. Diese Matrix der partiellen Ableitungen oder, falls regulär, deren Inverse spielt bekanntlich eine herausragende Rolle bei der komparativ-statischen Analyse des Gleichgewichts x^* von (1), und daher interessiert insbesondere auch deren Determinante.

In der Literatur ist seit langem bekannt, daß die dem Korrespondenzprinzip zugrundeliegende Annahme der asymptotischen Stabilität des (möglicherweise nicht-linearen) korrespondierenden Systems (2) nicht notwendigerweise auch asymptotische Stabilität des linearen Approximationssystems (3) impliziert[3], weswegen eine direkte Anwendung des Routh-Hurwitz-Theorems auf dieses lineare Approximationssystem im allgemeinen ausscheidet. Dieser Sachverhalt hat nun seinerseits zu der überpessimistischen Auffassung geführt, daß sich auf der Grundlage des Korrespondenzprinzips nur in Spezialfällen etwas zu dem Vorzeichen der interessierenden Systemdeterminante $|F_x(x^*, \alpha)|$ sagen läßt. Um Mißverständnissen vorzubeugen, stellen wir deshalb fest:

Ist die Systemmatrix $F_x(x^*, \alpha)$ regulär, so impliziert die Stabilitätsannahme des Korrespondenzprinzips für deren Determinante

$$\operatorname{sgn}|F_x(x^*, \alpha)| = (-1)^n / \operatorname{sgn} \prod_{i=1}^{n} k_i \ .$$

Beweis: Da $|A| = |K|\,|F_x(x^*, \alpha)| = \prod_{i=1}^{n} k_i\,|F_x(x^*, \alpha)|$ und $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ gilt, wobei $\lambda_i\,(i = 1, \ldots, n)$ die Eigenwerte von A sind, genügt es zu zeigen, daß A keinen Eigenwert mit positivem Realteil haben kann. Und das kann es in der

---

[2] Vgl. beispielsweise RICHTER, SCHLIEPER und FRIEDMANN [1981], S. 574f.

[3] Vgl. TAKAYAMA [1974], S. 311.

Tat nicht, denn ein Eigenwert mit positivem Realteil ist gemäß Ljapunovs Satz über die Stabilität nach der ersten Näherung[4] hinreichend für die Instabilität des approximierten Systems (2), was im Widerspruch zu der grundlegenden Stabilitätsannahme des Korrespondenzprinzips stünde.

Es versteht sich am Rande, daß das Korrespondenzprinzip natürlich in keiner Weise den für die komparativ-statische Analyse so unerfreulichen Fall $|F_x(x^*, \alpha)| = 0$ auszuschließen in der Lage ist und daß es auch sonst bei weitem nicht den Informationsgehalt aufweist, den vergleichsweise die Optimierungshypothese in der mikroökonomischen Analyse besitzt[5]. Andererseits sollte aber auch nicht übersehen werden, daß sich die Implikationen der Stabilitätsannahme des Korrespondenzprinzips keineswegs in der gerade erwähnten Feststellung über das notwendige Vorzeichen der Systemdeterminante erschöpfen[6].

III.

Wir wenden uns nun einem Gleichgewichtssystem der Form (1) zu, bei dem die Konstruktion des korrespondieren dynamischen Systems zu dem gemischten DGS

(2′)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ 0 \end{pmatrix} = KF(x, \alpha) \quad \text{mit} \quad K = \begin{pmatrix} K_{11} & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{pmatrix}$$

und dem linearen Approximationssytem

(3′)
$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x^1 - x^{1*} \\ x^2 - x^{2*} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = KF_x(x^*, \alpha) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

führt. Hierbei sind x^1 und x^2 Vektoren der Dimension m bzw. $n-m$, K_{11} ist eine Diagonalmatrix mit dem typischen Element $k_i \neq 0$, I_{n-m} ist die Einheitsmatrix der Ordnung $n-m$ und die $(n \times n)$-Matrix A soll konform so partitio-

---

[4] Vgl. hierzu Satz 10.1 und die zugehörige Definition „prägnanten" Stabilitätsverhaltens auf S. 22 bei HAHN [1959].

[5] Auf diesen Aspekt verweisen insbesondere BASSET, MAYBEE and QUIRK [1968] sowie BASSET [1968].

[6] Wie sich aus dem oben geführten Beweis ergibt, hat die Matrix A bei asymptotischer Stabilität des approximierten Systems (2) notwendigerweise nur Eigenwerte mit nichtpositivem Realteil. Es wird deswegen kaum überraschen, soll hier jedoch nicht im Detail belegt werden, daß dieser Sachverhalt die Anwendung des Routh-Hurwitz-Theorems oder des einfacher auszuwertenden modifizierten Routh-Hurwitz-Theorems von Murata in schwacher Ungleichungsform erlaubt. Vgl. MURATA [1977], S. 96ff.

niert sein, daß A_{11} und A_{22} quadratisch und von der Ordnung m bzw. $n-m$ sind. Wir wollen annehmen, daß A und A_{22} regulär sind. Angesichts der Regularität von K impliziert dies sofort Regularität von $F_x(x^*, \alpha)$.

Wie eingangs erwähnt, geht man in diesem Fall nun üblicherweise so vor, daß man aus jenem Teil des gemischten DGS (3′), der aus gewöhnlichen Gleichungen besteht, zunächst

$$x^2 - x^{2*} = -A_{22}^{-1} A_{21} (x^1 - x^{1*})$$

gewinnt und dann durch Einsetzen in (3′) das gemischte DGS auf das reine DGS

$$(3'') \qquad \dot{x}^1 = \bar{A}_{11} (x^1 - x^{1*}) \qquad \text{mit} \qquad \bar{A}_{11} = A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$$

reduziert. Unter Berufung auf das Korrespondenzprinzip muß die Determinante der Matrix $\bar{A}_{11}$ das Vorzeichen

$$(4) \qquad \operatorname{sgn} |\bar{A}_{11}| = (-1)^m$$

haben, und diese Information erlaubt es dann gegebenenfalls, die komparativ-statische Analyse für die Gruppe der endogenen Variablen x^1 durchzuführen und von dort die Analyse durch Rückwärtssubstitution auf die Variablengruppe x^2 auszudehnen.

Dieses eher mühsame Verfahren der Reduktion mit anschließender Rückgängigmachung läßt sich jedoch vermeiden, weil man mit Hilfe von (4) auch unmittelbar auf das Vorzeichen von $|A|$ und von dort auf das interessierende Vorzeichen von $|F_x(x^*, \alpha)|$ schließen kann. Es gilt nämlich:

Ist $F_x(x^*, \alpha)$ regulär und ist die Untermatrix A_{22} des linearen Approximationssystems (3′) *regulär, so impliziert die Stabilitätsannahme des Korrespondenzprinzips*

$$\operatorname{sgn} |F_x(x^*, \alpha)| = (-1)^m \operatorname{sgn} |A_{22}| / \operatorname{sgn} \prod_{i=1}^{m} k_i \; .$$

Beweis: Aufgrund elementarer Regeln für Determinanten gilt[7] $|A| = |A_{22}|\, |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}| = |A_{22}|\, |\bar{A}_{11}|$. Andererseits gilt $|A| = \prod_{i=1}^{m} k_i \cdot |F_x(x^*, \alpha)|$. Gleichsetzen ergibt unter Berücksichtigung von (4) sofort die Behauptung.

---

[7] Definiert man $M = -A_{12} A_{22}^{-1}$, was wegen $|A_{22}| \neq 0$ zulässig ist, so gilt offensichtlich $A_{12} + M A_{22} = 0$. Somit gilt

$$|A| = \left| \begin{pmatrix} A_{11} + M A_{21} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \right| = |A_{11} + M A_{21}|\, |A_{22}| = |A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}|\, |A_{22}| \; .$$

IV.

Zuletzt sind wir von der impliziten Annahme ausgegangen, daß das Vorzeichen von $|A_{22}|$ bekannt ist. Handelt es sich bei den letzten $n-m$-Gleichungen des gemischten DGS (2′) um Definitionsgleichungen, so dürften von daher auch kaum Schwierigkeiten zu erwarten sein. Andererseits entstehen bei der Analyse makroökonomischer Systeme korrespondierende gemischte DGSe von der Form (2′) oft erst dadurch, daß das Subsystem

$$0 = F^i(x, \alpha) \qquad i = n-m+1, \ldots, n$$

selbst als steady-state-Lösung eines reinen oder gemischten DGS mit vergleichsweise wesentlich größerer, d.h. praktisch unendlicher Konvergenzgeschwindigkeit angesehen wird. In diesem Fall ist es aus Konsistenzgründen offensichtlich unerläßlich, auch für dieses schnelle Subsystem Stabilität zu fordern, was selbstverständlich unmittelbare Konsequenzen für die erforderlichen Eigenschaften des entsprechenden Subsystems im linearen Approximationssystem und somit insbesondere für das zulässige Vorzeichen von $|A_{22}|$ hat[8]. Eine der Analyse des Gesamtsystems vorgeschaltete Anwendung der hier zusammengetragenen Ergebnisse auf das schnelle Subsystem würde dann auch dieses Vorzeichen klären.

Summary

The Correspondence Principle and Mixed Differential Equation Systems

When applying the correspondence principle, the formulation of the corresponding dynamic system often leads to a mixed differential equations system (DES), i.e. a system which consists of both differential equations and ordinary equations. The present paper shows what the correspondence principle implies in this case about the sign of the system's determinant and how this can be found without having to transform the mixed DES first into an ordinary one.

Literatur

BASSET, L. [1968], "The 'Correspondence Principle': An Evaluation", S. 596, in: J.P. Quirk and A.M. Zarley (eds.), *Papers in Quantitative Economics*, Lawrence.

— — MAYBEE, J. and QUIRK, J. [1968], "Qualitative Economics and the Scope of the Correspondence Principle", S. 595, in: J.P. Quirk and A.M. Zarley (eds.), *Papers in Quantitative Economics*, Lawrence.

MURATA, Y. [1977], *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, New York.

---

[8] Vgl. hierzu SCHLICHT [1978] sowie WITZEL [1980].

RICHTER, R., SCHLIEPER, U. und FRIEDMANN, W. [1981], *Makroökonomik*, 4. Auflage, Berlin.
SAMUELSON, P.A. [1941], "The Stability of Equilibrium: Comparative Statics and Dynamics", *Econometrica*, 9, 97–120.
-- [1942], "The Stability of Equilibrium: Linear and Nonlinear Systems", *Econometrica*, 10, 1–25.
-- [1947], *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge.
SCHLICHT, E. [1978], „Die Methode der Gleichgewichtsbewegung als Approximationsverfahren", S. 293–305, in: E. Helmstädter (Hrsg.), *Neuere Entwicklungen in den Wirtschaftswissenschaften*, Berlin.
TAKAYAMA, A. [1974], *Mathematical Economics*, Hinsdale.
WITZEL, R. [1980], *Zu linearisierten Differentialgleichungssystemen mit ‚langsamen' und ‚unendlich schnellen' Variablen*, hektografiert, Konstanz.

Dr. Michael Braulke
Professor Dr. Nikolaus K. A. Läufer
Universität Konstanz
Postfach 5560
D-7750 Konstanz
Bundesrepublik Deutschland